J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 5, No.2, 86-92, Januari 2009
ISBN:1858-1382

Ketidaksamaan Chebyshev Hukum Bilangan Besar pada Bisnis Asuransi

Georgina M. Tinungki[†]

Abstrak

Bisnis asuransi sangat erat kaitannya dengan teori statistik, khususnya teori probabilitas (kemungkinan) dalam mengelola risiko yang dijaminnya. Pentingnya mengasuransikan mobil untuk mengalihkan risiko yang mungkin terjadi akibat kerusakan, kecurian, atau kecelakaan terhadap kendaraan maupun jika kecelakaan tersebut menyebabkan kerugian secara langsung terhadap pihak ketiga. Prinsip yang diambil dari teori probabilitas ini dinamakan **hukum bilangan besar (***the law of large number***).** Cara yang dilakukan perusahaan asuransi dalam mengaplikasikan prinsip hukum bilangan besar ini ialah memperbanyak jumlah risiko itu sendiri. *The Law of Large Number* merupakan teorema dari statistik. Jika terdapat variabel acak, maka variabel acak itu akan stabil dalam waktu yang lama. Ini berarti dalam jangka waktu yang panjang nilai pengamatan akan selalu mendekati nilai harapan. Jenis kekonvergenen yang terpenting dalam hal ini jenis kekonvergenen lemah, yang menyatakan bahwa rataan sampel konvergen dalam peluang. Ketidaksamaan Chebyshev merupakan alat yang ampuh untuk membuktikan kekonvergenan lemah, yang dapat ditunjukkan pada pembuktian hukum bilangan besar yang lemah (*The Weak Law*).

Kata Kunci : *Bisnis asuransi*, *Law of Large Number*, *The Weak Law*, *Ketidaksamaan Chebyshev.*

1. Pendahuluan

Di Indonesia belum terlalu banyak orang yang mengasuransikan kendaraan bermotornya. Kondisi tersebut berbeda dengan keadaan di negara-negara Barat pada umumnya, dimana setiap kendaraan wajib diasuransikan. Seseorang bahkan tidak diperkenankan mengendarai kendaraan bermotor jika dirinya dan kendaraannya belum diasuransikan. Bagi sebuah perusahaan asuransi, yang penting bukan hanya luasnya jaminan yang diberikan serta premi yang kompetitif, tetapi juga pelayanan klaim terpadu yang cepat dan profesional, seperti Proses perpanjangan polis (renewal), sebaiknya dilakukan sebelum masa pertanggungan polis berakhir. Prinsip yang diambil dari teori probabilitas ini dinamakan **hukum bilangan besar (***the law of large number***).** Bagi sebuah perusahaan asuransi, yang penting bukan hanya luasnya jaminan yang diberikan serta premi yang kompetitif, tetapi juga pelayanan klaim terpadu yang cepat dan profesional.

2. Hukum Bilangan Besar

Hukum bilangan besar (*The Law of Large Number*) adalah salah satu teorema statistik. Jika terdapat variabel acak, maka variabel acak itu akan stabil dalam waktu yang lama. Ini berarti dalam jangka waktu yang panjang nilai pengamatan akan selalu mendekati nilai harapan

$$\overline{X}_n \to \mu \quad for \quad n \to \infty$$

[†] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

$$\operatorname{var}(X_i) = \sigma^2 < \infty \quad \forall \ i \in N$$

Hukum bilangan besar terdiri dari hukum bilangan besar yang kuat (*The Strong Law*), dan hukum bilangan besar yang lemah (*The Weak Law*)

Misalkan $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ barisan peubah acak dengan distribusi bersama (untuk $n \geq 1$) didefinisikan pada ruang sampel Ω yang sama. Misalkan Y peubah acak yang lain didefinisikan pada ruang sampel yang sama. Sekarang pembahasan tentang arti dari pada Y_n 'menuju (atau konvergen) ke' Y.

Definisi 1.

Dikatakan Y_n *konvergen ke Y dengan peluang 1 jika* $P\left[\lim_{n\to\infty} Y_n = Y\right] = 1$. (*Ini disebut pula* ***konvergen hampir pasti*** *atau* ***konvergen hampir dimana-mana*** *atau* ***konvergen kuat***).

Definisi 2.

Dikatakan $\boldsymbol{Y_n}$ ***konvergen ke Y dalam peluang*** ($Y_n \xrightarrow{p} Y$) *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|Y_n - Y| > \varepsilon\right] = 0$$

(*ini disebut juga sebagai* ***konvergen stokastik,*** *atau* ***konvergen dalam ukuran*** *atau* ***konvergen lemah***).

Definisi 3.

Dikatakan $\boldsymbol{Y_n}$ ***konvergen ke Y dalam rataan kuadrat*** *jika*

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_n - Y)^2 = 0$$

(*dikatakan pula* $Y_n \to Y$ *di* L_2 *atau* $Y_n \xrightarrow{2} Y$)

Definisi 4.

Dikatakan $\boldsymbol{Y_n}$ ***konvergen ke Y dalam distribusi*** ($Y_n \xrightarrow{d} Z$) *jika*

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(t) = F_Y(t)$$

pada setiap titik t yang $F_Y(.)$ *kontinu disitu. Dalam kasus tersebut, dikatakan pula bahwa* $F_n(t) = F_{Y_n}(t)$ ***konvergen lemah*** *ke* $F(t) = F_Y(t)$ *dan ditulis* $F_n \to F$.

3. Pembuktian Hukum Bilangan Besar Yang Lemah dengan Ketidaksamaan Chebyshev

Hukum bilangan besar yang lemah menyatakan bahwa rata-rata sampel, konvergen dalam probabilitas terhadap nilai harapannya.

Ini dinyatakan untuk setiap ε>0,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Disebut hukum lemah karena konvergensi dalam peluang itu memang lemah pada konvergensi variabel acak.

Pembuktian hukum bilangan besar yang lemah dengan menggunakan ketidaksamaan Chebyshev.

Diketahui:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right)$$

Akan dibuktikan:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu \quad for \quad n \to \infty$$

$$\operatorname{var}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E\left(\overline{X}_n\right) = \mu$$

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Atau

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Selama *n* menuju ∞, menurut definisi konvergen dalam peluang dapat berlaku:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu \quad for \quad n \to \infty$$

Hukum Bilangan Besar yang Kuat

Hukum bilangan besar yang kuat menyatakan bahwa rata-rata sampel dipastikan akan konvergen ke nilai harapannya.

$$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s} \mu \quad for \quad n \to \infty$$

Ini dinyatakan untuk setiap ε > 0,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\overline{X}_n = \mu\right) = 1$$

Pembuktian dari hukum ini lebih kompleks dari hukum lemah. Hukum ini membenarkan interpreatsi yang didasarkan pada intuisi dari nilai harapan dari variabel acak sebagai *"Long-term* *average when sampling repeatedly”*. Disebut hukum kuat karena konvergensi hampir pasti (*Almost Sure*) adalah konvergensi yang kuat pada variabel acak.

Defenisi 5.

Barisan dari sampel acak Y_n, disebut konvergen dalam peluang ke Y, ditulis $Y_n \xrightarrow{p} Y$, *jika*

(i) $\lim_{n\to\infty} P_r[|Y_n - Y| < \varepsilon]=1$

(ii) $\lim_{n\to\infty} P_r[|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0$

Teorema 1.

Jika $Y_n \xrightarrow{p} c$, *maka untuk sembarang fungsi g(y) yang kontinu pada c,* $g(y) \xrightarrow{p} g(c)$

Bukti :

Karena g(y) kontinu pada c, maka

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \ni |y - c| < \delta$ *dimana* $|g(y) - g(c)| < \varepsilon$

Karena $|Y_n - c| < \delta \subset |g(Y_n) - g(c)| < \varepsilon$

Maka $P(|g(Y_n) - g(c)| < \varepsilon) \geq P(|Y_n - c| < \delta)$

Karena $Y_n \xrightarrow{p} c$, *hal ini berarti untuk* $\delta > 0$

$P(|Y_n - c| < \delta) = 1$

$$P(|g(Y_n) - g(c)| < \varepsilon) \geq P(|Y_n - c| < \delta) = 1$$

Karena $P(|g(Y_n) - g(c)| < \varepsilon)$ *tidak mungkin lebih dari 1*

Maka $P(|g(Y_n) - g(c)| < \varepsilon) = 1$

$\therefore g(Y_n) \xrightarrow{p} g(c)$

Teorema 2.

Jika X_n dan Y_n adalah barisan dari peubah acak dimana $X_n \xrightarrow{p} c$ *dan* $Y_n \xrightarrow{p} d$, *maka :*

1. $aX_n + bY_n \xrightarrow{p} ac + bd$
2. $X_nY_n \xrightarrow{p} cd$
3. $\frac{X_n}{c} \xrightarrow{p} 1\ p(X_n \geq 0)\ \ \forall n,$ *untuk* $c \neq 0$
4. $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{p} \frac{1}{c}$, *jika* $p(X_n \neq 0) = 1,\ \ \forall n,\ \ c \neq 0$
5. $\sqrt{X_n} \xrightarrow{p} \sqrt{c}$, *jika*

Bukti :

3. Jika $X_n \xrightarrow{p} c \neq 0, X_n$ *adalah barisan peubah acak Simpulan* $\frac{X_n}{c} \xrightarrow{p} 1$

Bukti :

Diketahui : $\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0$

Akan ditunjukkan : $\lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\frac{X_n}{c} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

Penyelesaian :

Ambil $\varepsilon > 0$ *sembarang*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{X_n}{c} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty}(|X_n - c| \geq \varepsilon|c|)$$

Misalkan : $\varepsilon = \varepsilon|c|$.

Berlaku $\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - c| \geq \varepsilon') = 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - c| \geq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - c| \geq \varepsilon|c|) = 0$$

Diketahui : X_n *adalah peubah acak,* $p(X_n \neq 0) = 1, \ \forall n$

Jika $X_n \xrightarrow{p} c$ *maka* $\forall\varepsilon \geq 0 \ \ni \ \lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - c| < \varepsilon) = 1$

Akan dibuktikan : - $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{p} \frac{1}{c}$, $c \neq 0$

- $\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - c| < \varepsilon) = 1$

Ambil $\varepsilon > 0$ *sembarang*

$$|X_n - c| < \varepsilon \quad = \left|(X_n - c)\frac{X_n c}{X_n c}\right| < \varepsilon$$

$$= \left|\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{X_n}\right)X_n c\right| < \varepsilon$$

$$= \left|\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{X_n}\right)\right| |X_n c| < \varepsilon$$

$$Pr(|X_n - c| < \varepsilon) \quad = Pr\left(\left|\frac{1}{c} - \frac{1}{X_n}\right| |X_n c| < \varepsilon\right)$$

$$= Pr\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| |X_n c| < \varepsilon\right)$$

$$= Pr\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| < \frac{\varepsilon}{|X_n c|}\right)$$

Karena $Pr\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| < \frac{\varepsilon}{|X_n c|}\right) \leq Pr\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}\right) \leq 1$

Misal $\varepsilon' = \frac{\epsilon}{|c|}$ *, untuk* $c \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - c| < \varepsilon) \ \leq \lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon'\right) = 1 \leq 1$$

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon'\right) \leq 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon'\right) = 1$$

$$\therefore \frac{1}{X_n} \xrightarrow{p} \frac{1}{c}$$

5. *Diketahui :* X_n *peubah acak*

$p[X_n \geq 0] = 1, \forall n$

$X_n \xrightarrow{p} c$ *artinya* $\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - c| < \varepsilon) = 1$

Dit $\sqrt{X_n} \xrightarrow{p} \sqrt{c}$ *=……?*

Artinya akan dibuktikan $\lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\sqrt{X_n} - \sqrt{c}\right| < \varepsilon\right) = 1$

Ambil $\varepsilon > 0$ *sembarang*

$$Pr(|X_n - c| < \varepsilon) \ = \ Pr\left(\left|(\sqrt{X_n} - \sqrt{c})(\sqrt{X_n} + \sqrt{c})\right| < \varepsilon\right)$$

$$= Pr\left(\left|\sqrt{X_n} - \sqrt{c}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{X_n} + \sqrt{c}}\right)$$

$$\geq Pr\left(\left|\sqrt{X_n} - \sqrt{c}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{c}}\right)$$

$$\geq \ 1$$

Misalkan $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{c}}$ *untuk* $c > 0$ *Berlaku :*

$$1 = \lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - c| < \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\sqrt{X_n} - \sqrt{c}\right| < \ \varepsilon'\right) \leq 1$$

Karena $1 \leq \lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\sqrt{X_n} - \sqrt{c}\right| < \varepsilon\right) \leq 1$

Jadi, $\lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\sqrt{X_n} - \sqrt{c}\right| < \varepsilon\right) = 1$

$$\therefore \sqrt{X_n} \xrightarrow{p} \sqrt{c}$$

4. Beberapa Penerapan Hukum Bilangan Besar dalam Kehidupan Sehari-hari

- SMS, walaupun hanya Rp 250,- tetapi kalau yang mengirim sms 1.000.000 orang pasti hasilnya akan besar.
- Koran Kompas misalnya hanya untung Rp 10,- per koran, tetapi yang membeli kompas ribuan orang, maka akan tetap untung juga, belum lagi pemasukan dari iklan.
- Tianshi omzetnya hanya dari *'tiens tooth paste'* yang hanya Rp 50.000,- tetapi dalam jaringan ada 500 orang yang menggunakannya, sehingga tetap akan ada untung Rp 25 juta.
- Ide dasar program ini mengacu pada kultur bangsa Jepang. Seperti diutarakan Willy, negeri kepulauan tersebut sering diguncang gempa bumi dan jika terjadi gempa semua orang mengalami kerugian, termasuk perusahaan asuransi. Meski demikian, perusahaan asuransi tetap menanggung kerugian yang dialami oleh para nasabahnya. Mengingat mereka telah diuntungkan oleh perusahaan asuransi, orang-orang Jepang biasanya tidak segan-segan jika harus membayar lebih kepada perusahaan asuransi dan mengajak teman atau kerabat mereka untuk berasuransi.
- Masuknya kewajiban perusahaan angkutan laut untuk mengasuransikan tanggung jawabnya dalam UU Pelayaran merupakan pasar potensial untuk digarap pelaku industri asuransi. Kewajiban asuransi yang dimuat dalam UU lama di antaranya tanggung jawab terhadap penumpang, muatan, dan kerugian terhadap pihak ketiga. Juga asuransi terhadap pencemaran yang bersumber dari kapalnya. Untuk peraturan yang baru ada tambahan, yakni tanggung jawab terhadap pengangkutan multimoda.

5. Kesimpulan

- Prinsip yang diambil dari teori probabilitas **hukum bilangan besar (***the law of large number***)** merupakan cara yang dilakukan perusahaan asuransi dalam mengaplikasikan prinsip hukum bilangan besar yang memperbanyak jumlah risiko.
- Ketidaksamaan Chebyshev merupakan alat yang ampuh untuk membuktikan kekonvergenan lemah, yang dapat ditunjukkan pada pembuktian hukum bilangan bersar yang lemah (*The Weak Law*).

Bagi sebuah perusahaan asuransi, yang penting bukan hanya luasnya jaminan yang diberikan serta premi yang kompetitif, tetapi juga pelayanan klaim terpadu yang cepat dan profesional.

Daftar Pustaka

1. Dudewicz, E. J., and Mishra, S. N. 1988. *Modern Mathematical Statistics.* John Wiley & Sons, Ltd. Inc.

2. Hogg, R. V., and Craig, A. T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*, Fifth Edition. Prentice Hall Inc.

3. Bain, L. J., and Engelhardt, M. 1992. *Introduction To Probability and Mathematical Statistics*, Second Edition. Duxbury Press. An Imprint of Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

4. Casella, G., and Berger, R. L. 1990. *Statistical Inference.* Wadsworth Inc., Belmont, California 94002.